एयरफोर्स ग्रुप X एवं Y के लिए गणित के टिप्स: गुणना (कैलकुलस)

प्रिय अभ्यर्थियों,

हमें उम्मीद है कि आगामी एयरफोर्स परीक्षा के लिए आपकी तैयारी अच्छी चल रही होगी। इसमें आपकी मदद करने हेतु, यहाँ हम परीक्षा में गणना प्रश्नों को हल करने हेतु सूत्रों के साथ टिप्स और ट्रिक्स पर चर्चा करेंगे। इस भाग में निम्नलिखित विषय शामिल हैं:

- सीमा और निरंतरता
- विभेदन
- डेरिवेटिव के अनुप्रयोग
- अनिश्चित अभिन्न
- निश्चित अभिन्न
- अभिन्न के अनुप्रयोग
- विभेदक समीकरण

परीक्षा में इस भाग से गणित अनुभाग के कुल 25 प्रश्नों में से 7-9 प्रश्न पूछे जाते हैं। इसलिए इस विषय में महारत हासिल करने से आपको एक महत्वपूर्ण लाभ प्राप्त होगा।

गणना (कैलकुलस) को मुख्य रूप से दो भागों अर्थात् विभेदक गणना (कैलकुलस) और अभिन्न गणना (कैलकुलस) में विभाजित किया जाता है। जबकि विभेदक गणना (डिफरेंशियल कैलकुलस) परिवर्तन की दर की गणना करने हेतु एक क्षेत्र को छोटे भागों में विभाजित करती है, अभिन्न गणना (इंटेग्रल कैलकुलस) क्षेत्र या आयतन की गणना करने हेतु छोटे भागों में शामिल होती है।

दोनों भागों में बड़ी संख्या में सूत्र होते हैं (जिन्हें आपको याद रखने की आवश्यकता होगी)। चूंकि सूत्र इस विषय का सबसे महत्वपूर्ण हिस्सा हैं, हम पहले उन पर चर्चा करेंगे (केवल सूत्रों को देखकर अभिभूत न हों, जितने अधिक प्रश्नों का आप अभ्यास करेंगे, उन्हें याद रखना उतना ही सरल होगा)।

❖ सूत्रों की सीमा निर्धारित करें

1) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; where f(x)is a polynomial or rational function in the domain of x.
2) $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, (\infty - \infty), (\infty \times 0), 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ these all are indeterminate forms.

जब किसी परिमेय फलन (रेशनल फंक्शन) की सीमा का एक अनिश्चित रूप होता है, इसलिए अंश और भाजक के बीच सामान्य कारकों द्वारा, सूत्रों का उपयोग करके या L'Hospital नियम का उपयोग करके फलन (फंक्शन) को सरल बनाएं।

3) L'Hospital' नियम :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

यह $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ रूप के लिए अच्छा है। व्युत्पन्न तब तक जारी रहता है जब तक उसके पास $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ रुप नहीं होता है।

4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$

5) $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

6) $e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$

7) $a^x = 1+\frac{x\log a}{1!}+\frac{(x\log a)^2}{2!}+\cdots$

8) $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

9) $\log(1-x) = -\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right]$

10) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

11) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \cos x = \frac{\tan x}{x} = 1$; (note: here x is in radians and not in degrees)

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = \frac{\tan kx}{x} = k$

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\tan x}{x} = 0$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \frac{a^2}{b^2}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

17) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

18) $\sum n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

19) $\sum n^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

20) $\sum n^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

❖ **अवकलन सूत्र:**

1) $\frac{d}{dx}(k) = 0$; where k is a constant

2) $\frac{d}{dx}(k.u) = k.\frac{du}{dx}$; where k is a constant and u is a function of x.

3) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$; where u and v are functions of x.

4) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(u.v.w) = vw.\frac{du}{dx} + uw.\frac{dv}{dx} + uv.\frac{dw}{dx}$; where u, v and w are functions of x.

6) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$

7) यदि y, u का अवलकनीय फलन है तथा u, x का अवलकनीय फलन है, तो

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ **(श्रृंखला नियम)**

8) यदि x और y दोनों समान चर (t), अर्थात् y=*f (t)* और x=*g (t)* के फलन हैं, तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

9) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$; it is called second derivative.

यदि *y = f(x)* है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ को *f''(x) or f²(x)* के रूप में भी लिखा जा सकता है।

10) $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$; it is called third derivative.

11) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

12) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{-n}{x^{n+1}}$

13) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

14) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

15) $\frac{d}{dx}(\tan x) = sec^2 x$

16) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -cosec^2\, x$

17) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

18) $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x) = -\mathrm{cosec}\, x \cot x$

19) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

20) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

21) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

22) $\frac{d}{dx}(sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

23) $\frac{d}{dx}(cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

24) $\frac{d}{dx}(tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

25) $\frac{d}{dx}(cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

26) $\frac{d}{dx}(sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

27) $\frac{d}{dx}(cosec^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

समाकलन सूत्र

1) $\int a\,dx = ax + c$
2) $\int k.f(x)\,dx = k.\int f(x)dx$; where k is a constant.
3) $\int (u \pm v \pm w \pm \cdots)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \pm \int w\,dx \pm \cdots$; where u, v, w ... are functions of x.
4) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$; here $x \neq -1$
5) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
6) $\int e^x dx = e^x + c$
7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
8) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$
9) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
10) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
11) $\int tanx\,dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$
12) $\int \cot x\,\,dx = \ln|\sin x| + c = -\ln|cosec\,x| + c$
13) $\int \sec x\,\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$
14) $\int cosec\,x\,\,dx = \ln|cosec\,x - \cot x| + c$
15) $\int sec^2 x\,dx = \tan x + c$
16) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
17) $\int cosec^2 x\,dx = -\cot x + c$
18) $\int cosec\,x\,.\cot x\,dx = -cosec\,x + c$
19) $\int tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$
20) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + c$

21) $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \cos^{-1}\frac{x}{a} + c => \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$

22) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c => \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

23) $\int \frac{-1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c => \int \frac{-1}{1+x^2} dx = \cot^{-1} x + c$

24) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c => \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

25) $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a}cosec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c => \int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = cosec^{-1} x + c$

❖ टिप्स और ट्रिक्स

- प्रश्नों का स्तर इतना कठिन नहीं है इसलिए प्रयास करें कि बहुत कठिन प्रश्नों पर अपनी ऊर्जा व्यर्थ न करें। इसके बजाय बुनियादी अवधारणाओं को समझने और विभिन्न प्रकार के प्रश्नों से खुद को परिचित कराने में अपना समय निवेश करें।
- गणना (कैलकुलस) में प्रश्न ट्रिकी होते हैं और बहुत अधिक अभ्यास की आवश्यकता होती है। इन्हें आमतौर पर मान को रखकर या शॉर्टकट का उपयोग करके हल नहीं किया जा सकता है। इसलिए जितना हो सके उतने प्रश्नों का अभ्यास करें।
- सूत्रों को याद रखें, उनके बिना परीक्षा में प्रश्नों को हल करना असंभव है। विभेदीकरण और समाकलन द्विदिशी हैं और उनके सूत्रों को उनमें से किसी एक को याद करके याद किया जा सकता है। हमने इस लेख में सभी महत्वपूर्ण गणना सूत्रों को शामिल किया है। उन्हें यहां से समय-समय पर (और परीक्षा से पहले) संशोधित करें।
- जब किसी फलन का प्रत्यक्ष समाकलन कठिन होता है, तो आप समाकलन की इन तीन पद्धतियों का उपयोग कर सकते हैं:

I. **परिवर्तन विधि** :

उदाहरण: $\int \sqrt{1-\sin 2\theta}\ d\theta = \int \sqrt{sin^2\theta + cos^2\theta - 2sin\theta.cos\theta}\ d\theta$

$$= \sqrt{(cos\theta - sin\theta)^2}\ d\theta = \int (cos\theta - sin\theta)\ d\theta = sin\theta + cos\theta + c$$

II. **प्रतिस्थापन विधि :**

उदाहरण: $\int sec^2(2x+3)dx$

माना (2x+3) =z, तो dz=2dx अथवा dx=$\frac{dz}{2}$

$$= \int sec^2 z.\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int sec^2 z\ dz = \frac{1}{2}\tan z + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan(2x+3) + c$$

III. **भागों द्वारा सकाकलन:**

इस पद्धति का उपयोग तब किया जाता है जब समाकल्य (इंटेग्रांड) दो फलनों का गुणनफल होता है।

उदाहरण: $\int u.v.dx = u.\int v\,dx - \int\left(\frac{du}{dx}\int vdx\right)dx$

यह तय करने के लिए कि कौन से फलन को पहले (u के रूप में) लिया जाना चाहिए, आपको ILATE सूत्र के अनुसार प्राथमिकता देनी चाहिए, जहाँ

I→ इन्वर्स सर्क्युलर फंकशन (Inverse circular function)

L→ लघुगणक फलन (Logrithmic function)

A→ बीजगणितीय फलन (Algebraic function)

T→ त्रिकोणमितीय फलन (Trignometric function)

E→ घातांक श्रित (Exponential function)

उदाहरणार्थ: $\int \tan^{-1} x\ dx$

$$\int \tan^{-1} x\,.x^0\,dx = \tan^{-1} x \int x^0 dx - \int\left(\frac{d}{dx}\tan^{-1} x\int x^0 dx\right)dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2}.x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

❖ **उदाहरण समस्याएं:**

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x} = ?$

(A) $\frac{1}{2}\cos 2$ **(B)**1 **(C)**$2\cos 2$ **(D)**0

समाधान:

सूत्र sin(a+b) = sin a cos b + cos a sin b का उपयोग करने पर

⇨ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2\cos x+\cos 2\sin x-\sin 2\cos x+\cos 2\sin x}{x}$

⇨ $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2\sin x}{x}$

⇨ $2\cos 2\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$

यहाँ हम जानते हैं कि $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

⇨ इसलिए, उत्तर (c) 2cos2 होगा।

2. $\int \frac{\cos 2x}{cos^2 x sin^2 x}dx = ?$

(A) $\cot x + \tan x + c$ **(B)** $\cot x - \tan x + c$

(C) – $\cot x - \tan x + c$ (D) $\tan x - \cot x + c$

समाधान:

⇨ $\int \frac{cos^2x - sin^2x}{cos^2x sin^2x} dx$ [चूंकि cos 2x = $\cos^2$x – $\sin^2$x]

⇨ $\int \frac{cos^2x}{cos^2x sin^2x} - \frac{sin^2x}{cos^2x sin^2x}\ dx$

⇨ $\int \frac{1}{sin^2x} - \frac{1}{cos^2x}\ dx$

⇨ $\int (cosec^2x - sec^2x)\ dx$

⇨ $-\cot x - \tan x + c$

⇨ इसलिए सही उत्तर (C) है।

3. विशेषक समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2e^y$ का समाधान ज्ञात करें।

(A) $e^x - e^y + \frac{y^3}{3} = c$ (B) $e^x + e^y + \frac{x^3}{3} = c$

(C) $e^x + e^{-y} + \frac{x^3}{3} = c$ (D) $e^x + e^{-y} + \frac{y^3}{3} = c$

समाधान:

⇨ $\frac{dy}{dx} = e^y(e^x + x^2)$

⇨ $\frac{dy}{e^y} = (e^x + x^2)dx$

⇨ दोनों पक्षों का एकीकरण करने पर

$$\int e^{-y}dy = \int (e^x + x^2)dx$$

⇨ $-e^{-y} + c = e^x + \frac{x^3}{3} + c$

⇨ $e^x + e^{-y} + \frac{x^3}{3} = c$

⇨ इसलिए सही उत्तर (C) है।

4. $\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} sin^2x\ dx = ?$ का मान ज्ञात करें।

(A) 1 (B) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$ (D) 0

समाधान:

cos 2x = 1 – 2sin²x का उपयोग करके

⇨ $\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{2}\ dx$

⇨ $\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)\ dx$

⇨ $\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]$

⇨ सीमा निर्धारण पर

⇨ $\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\sin\frac{-2\pi}{3}}{2}\right]$

⇨ $\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

⇨ $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

⇨ इसलिए सही उत्तर (B) है।

5. यदि $\boldsymbol{f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$ है तो $\boldsymbol{f'(x)}$=? का मान ज्ञात करें।

(A) $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **(B)** $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **(C)** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **(D)** $\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$

समाधान:

श्रृंखला नियम का उपयोग करने पर

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\left(1+\frac{1\,.2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

इसलिए सही उत्तर (C) है।